

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ: ПРИМЕРЫ И КОНТРПРИМЕРЫ

1. $a_n = (-1)^n$ ограничена, но не имеет предела, т.к. $a_{2n} \rightarrow 1$, $a_{2n+1} \rightarrow (-1)$
2. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ сходится, достигает точной верхней и точной нижней граней:
 $\min\{a_n\} = \inf\{a_n\} < \lim a_n < \max\{a_n\} = \sup\{a_n\}$
3. $a_n = (-1)^n \cdot (1 + \frac{1}{n})$ не имеет предела, достигает точной верхней и точной нижней граней: $\min\{a_n\} = \inf\{a_n\} < \underline{\lim} a_n, \overline{\lim} a_n < \sup\{a_n\} = \max\{a_n\}$
4. $a_n = (-1)^n \cdot (1 - \frac{1}{n})$ не имеет предела, не достигает ни точной верхней, ни точной нижней граней: $\inf\{a_n\} = \underline{\lim} a_n, \overline{\lim} a_n = \sup\{a_n\}$
5. $a_n = \frac{1000^n}{n!}$ монотонно возрастает до $n = 999$, монотонно убывает с $n = 1000$
6. $a_n = \ln n$ монотонно возрастает и не ограничена сверху, но $(a_n - a_{n-1}) \rightarrow 0$
7. $a_n = (1 + (-1)^n) \cdot n$ не ограничена сверху (т.к. $a_{2k} \rightarrow +\infty$), но не является бесконечно большой (т.к. $a_{2k+1} = 0$)
8. $a_n = n + (-1)^{n+1}$ стремится к $+\infty$, причем не является монотонной
9. $a_n = (-1)^n \cdot n$ бесконечно большая, но не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$
10. $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $b_n = n^2 \rightarrow +\infty$, $a_n \cdot b_n = n$ - бесконечно большая
11. $a_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, $b_n = n \rightarrow +\infty$, $a_n \cdot b_n = \frac{1}{n}$ - бесконечно малая
12. $a_n = 2 + (-1)^n$, $b_n = 2 + (-1)^{n+1}$, $\overline{\lim} (a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$,
 $\overline{\lim} (a_n \cdot b_n) < \overline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} b_n$
13. $a_n = \frac{1}{2n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N} (a_n < b_n)$, но $\lim a_n = \lim b_n$
14. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $b_n > |a_n|$, b_n монотонно убывает, a_n не монотонна,
 $\lim a_n = \lim b_n = 0$
15. $a_n = \frac{9}{n}$, $b_n = 1 - \frac{9}{n}$. Хотя $0 = \lim a_n < \lim b_n = 1$, но $a_k > b_k$ для $k < 18$